

Étiquetage gracieux d'une figure

On considère un ensemble fini de points. On relie certains de ces points par des segments. L'ensemble ainsi constitué est appelé *figure*.

On effectue l'*étiquetage* d'une *figure* comportant n segments en associant à chaque point un entier compris entre 0 et n , ces entiers étant distincts deux à deux.

On attribue à chaque segment la valeur absolue de la différence des entiers associés à ses extrémités. Cet entier est appelé *pondération* du segment.

On dit que l'*étiquetage* de la figure est *gracieux* si les n pondérations obtenues sur les segments sont exactement tous les entiers de 1 à n .

On donne ci-dessous un exemple d'*étiquetage gracieux* d'une figure comportant 6 points et 7 segments :

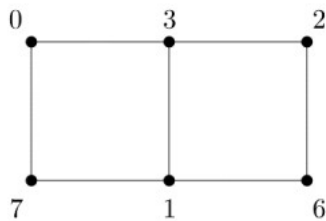


Figure étiquetée

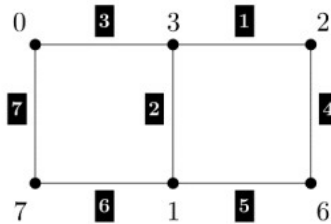
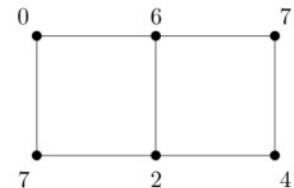
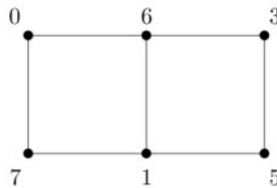


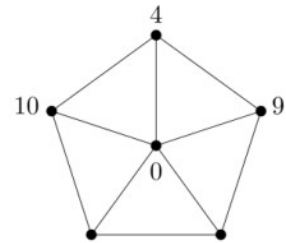
Figure étiquetée avec indication des pondérations

A. Des exemples

- Pour chacune des figures ci-contre, préciser si l'étiquetage proposé est un étiquetage gracieux.



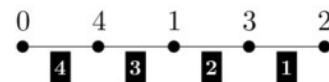
- Compléter l'étiquetage de la figure ci-contre pour obtenir un étiquetage gracieux.



B. Cas des lignes

Pour tout entier naturel non nul n , on considère la figure L_n constituée de $n + 1$ points alignés et des n segments joignant des points voisins.

On propose ci-contre l'étiquetage gracieux des points de la figure L_4 .



- Montrer qu'on peut trouver un étiquetage gracieux pour chacune des figures L_5 , L_6 et L_7 .
- On admet qu'on peut trouver un étiquetage gracieux pour la figure L_{2022} tel que le point le plus à gauche soit étiqueté avec 0. Décrire cet étiquetage.

C. Cas des polygones

1. Montrer que tout triangle et tout quadrilatère peut être muni d'un étiquetage gracieux.

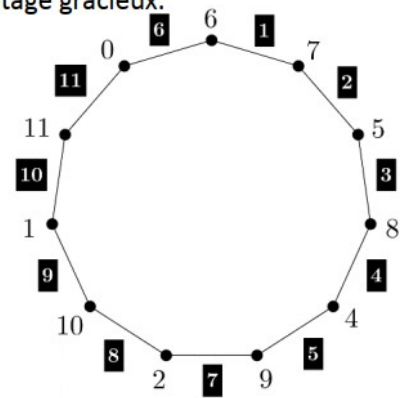
2. On a représenté ci-contre un polygone à 11 côtés muni d'un étiquetage gracieux.

En déduire un étiquetage gracieux pour un polygone à 12 côtés.

3. Déterminer la parité de la pondération d'un segment lorsque les étiquettes de ses extrémités sont :

- de parités différentes ;
- de même parité.

4. En déduire qu'on ne peut pas trouver un étiquetage gracieux pour les pentagones.



D. Une très grande figure

On note K_{2022} la figure constituée de 2 022 points telle que tout couple de points est relié par un unique segment.

1. Montrer que K_{2022} est constituée de 2 043 231 segments.

2. On suppose qu'il existe d'un étiquetage gracieux de K_{2022} .

- Quel est le nombre de segments dont la pondération est un nombre impair ?
- On note p le nombre de points étiquetés avec un nombre pair. Exprimer en fonction de p le nombre de segments dont la pondération est un nombre impair.

3. Montrer finalement que K_{2022} ne peut pas être muni d'un étiquetage gracieux.